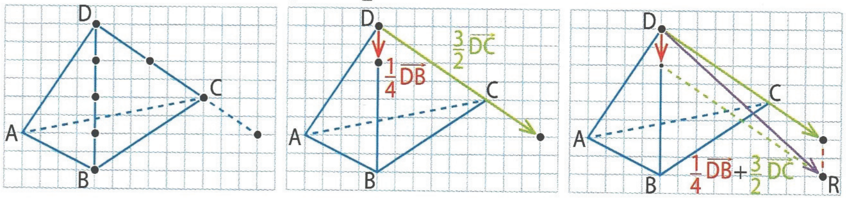
12. Corrigés des exercices d'entraînement et de préparation au DS

Exercice 4.A :

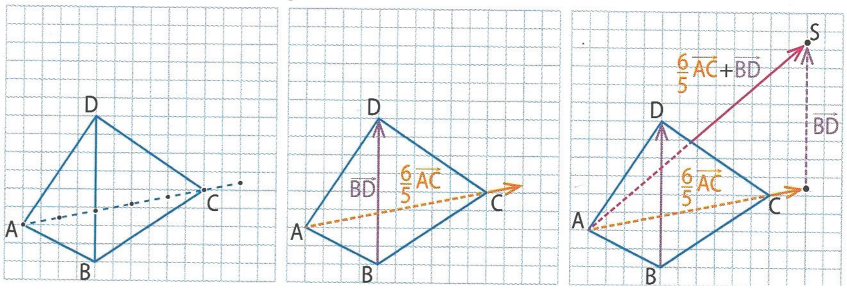
1 On souhaite placer le point R tel que $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$:

- On partage [DB] en 4 et [DC] en 2.
- On représente les vecteurs $\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.
- On place R à l'aide d'une somme de vecteurs.

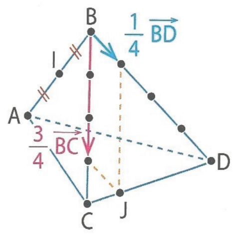


2 On souhaite placer le point S tel que $\overrightarrow{AS} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$:

- On partage le segment [AC] en 5.
- On représente les vecteurs $\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
- On place S à l'aide d'une somme de vecteurs.



Exercice 4.B :



1 À l'aide des graduations, on lit $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

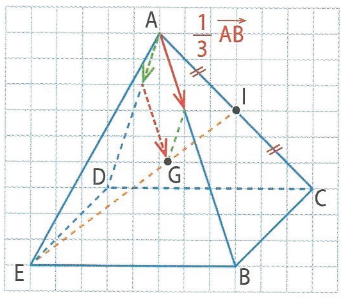
2 I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

3 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 4.C :



1 Voir la figure.

2 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

3 $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ car I est le milieu de [AC]. Or $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$ car BCDE est un parallélogramme.

Enfin $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.

Ainsi, $\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD})$

donc $\overrightarrow{EI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

4 On constate que $\overrightarrow{EI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

On peut en déduire que les points E, I et G sont alignés.

Exercice 4.D :

1. $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AU} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ car ABCD est un parallélogramme.

   D'où $\overrightarrow{TU} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ soit $\overrightarrow{TU} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

   • $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ER} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$. Puisque ABFE est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{TR} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

   • $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ES} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$. Puisque ADHE est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{TS} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ soit $\overrightarrow{TS} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

2. On a $9\overrightarrow{TU} = -3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}$ et $6\overrightarrow{TS} = -\overrightarrow{AD} + 6\overrightarrow{AE}$ donc $9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS} = -4\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AE}$.

3. On peut remarquer que $6\overrightarrow{TR} = -4\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AE} = 9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS}$. Ainsi $6\overrightarrow{TR} - 9\overrightarrow{TU} - 6\overrightarrow{TS} = \vec{0}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{TR}$, $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{TS}$ sont coplanaires.

4. Les vecteurs $\overrightarrow{TR}$, $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{TS}$ de même origine T sont coplanaires, donc les points R, U et S appartiennent à un même plan passant par T : ils sont coplanaires.

Exercice 4.E :

1. I et J appartiennent respectivement aux droites (AB) et (AC) qui sont incluses dans le plan (ABC) donc I et J appartiennent à (ABC). On en déduit que les droites (IJ) et (BC) sont coplanaires : elles sont soit sécantes, soit parallèles.

   Or $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ car J est le milieu de [AC] et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

   Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{BC} = -k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. Le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan (ABC).

   La décomposition du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ dans cette base est unique donc l'égalité $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$ conduit à $k = \frac{1}{3}$ et $k = \frac{1}{2}$ ce qui n'est pas possible.

   (IJ) et (BC) ne peuvent pas être parallèles : elles sont donc sécantes.

2. Supposons que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.

   Cela permet d'affirmer que les droites (IJ) et (AD) sont coplanaires. Or A, I et J appartiennent tous trois au plan (ABC) d'après la question **1**. Cela signifie que D est un point du plan (ABC), c'est-à-dire que A, B, C et D sont coplanaires. C'est absurde car ABCD est un tétraèdre.

   La supposition initiale est donc fausse : (AD) et (IJ) ne sont pas parallèles.

Exercice 4.F :

1. On décompose le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ à l'aide de la relation de Chasles :

   $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

   On en déduit : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

   $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

2. **a.** O est le centre du parallélépipède rectangle donc O est le milieu de [BH] et $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$. Ainsi $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.

   b. On décompose le vecteur $\overrightarrow{JK}$ à l'aide de la relation de Chasles :

   $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$.

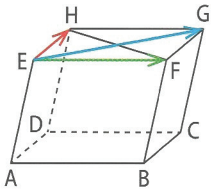
   Cela conduit à $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

   $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) qui sont respectivement égaux à $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

   On en déduit que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

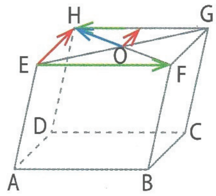
Exercice 4.G :

1 • $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$



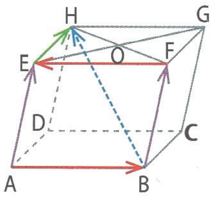
Cela traduit directement de la règle du parallélogramme.

• $\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$



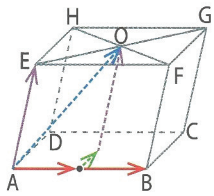
En effet, O est le milieu de [FH] donc $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$.

2 • $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$



On a $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$ avec $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ puisque ABCDEFGH est un parallélépipède.

• $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$



On a $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EO}$ donc $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$ puisque O est le centre de EFGH.

Exercice 4.H :

1 Les coordonnées de A sont (3 ; 3 ; 3) et celles de B sont (2 ; 6 ; 4).

2 Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$, c'est-à-dire (2 – 3 ; 6 – 3 ; 4 – 3) soit (–1 ; 3 ; 1).

3 La droite (AB) passe par le point A(3 ; 3 ; 3) et elle a pour vecteur directeur AB(–1 ; 3 ; 1).
Une représentation paramétrique de (AB) est donc

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + t z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit } \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Puisque B est un point de (AB), une autre représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = x_B + k x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_B + k y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_B + k z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}, \text{ soit } \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 6 + 3k \\ z = 4 + k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.I :

1 A appartient à d si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_A = 5 - t \\ y_A = -1 + 3t \\ z_A = 1 + t \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} 3 = 5 - t \\ 5 = -1 + 3t \\ -2 = 1 + t \end{cases}$ soit à $\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$.

Ceci implique qu'il n'existe pas de réel t vérifiant les trois équations : on en déduit que le point A n'appartient pas à la droite d.

2 Un point de d a pour coordonnées (5 ; –1 ; 1) que l'on obtient en remplaçant t par 0 dans les équations. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de d a pour coordonnées (–1 ; 3 ; 1).

3 $\vec{u}(-1\ ;3\ ;1)$ est un vecteur directeur de la droite d et $\vec{v}(2\ ;-6\ ;-2)$ est un vecteur directeur de la droite d'. On remarque que $\vec{v} = -2\vec{u}$. Puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on en déduit que les droites d et d' sont parallèles.

Exercice 4.J :

Les droites d et d' ont un point d'intersection si, et seulement si, il existe un couple $(t\,;k)$ de réels solution du système $\begin{cases} 3+2t=1-3k \\ -1-t=1+k \\ 4+3t=2-5k \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} 2t+3k=-2 \\ -t-k=2 \\ 3t+5k=-2 \end{cases}$.

On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :

$$\begin{cases} 2t+3k=-2 \\ -t-k=2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2t+3k=-2 \\ -2t-2k=4 \end{cases}.$$

On remplace la deuxième équation par la somme des deux équations, le système équivaut à $\begin{cases} 2t+3k=-2 \\ k=2 \end{cases}$. On obtient alors $t=-4$ et $k=2$.

Il faut à présent s'assurer que la troisième égalité est vérifiée par ces valeurs :
$3t+5k=3\times(-4)+5\times 2=-2$, ce qui convient.

Par conséquent, A est le point de d de paramètre -4 et A est aussi le point de d' de paramètre 2. On remplace, par exemple, dans la représentation paramétrique de d' :

$$\begin{cases} x_A=1-3\times 2 \\ y_A=1+2 \\ z_A=2-5\times 2 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x_A=-5 \\ y_A=3 \\ z_A=-8 \end{cases}.$$

Exercice 4.K :

1. On a $\overrightarrow{AB}(4\,;-6\,;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;1\,;-3)$.
   Puisque $x_{\overrightarrow{AB}}=-4x_{\overrightarrow{AC}}$ mais $Y_{\overrightarrow{AB}}\neq -4y_{\overrightarrow{AC}}$, il n'existe pas de réel t tel que $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}$.
   Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2. Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires revient à déterminer deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.
   Puisque $\overrightarrow{AD}(11\,;-15\,;1)$, cela se traduit par le système : $\begin{cases} 4\alpha-\beta=11 \\ -6\alpha+\beta=-15 \\ -4\alpha-3\beta=1 \end{cases}$.
   On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :
   $\begin{cases} 4\alpha-\beta=11 \\ -6\alpha+\beta=-15 \end{cases}$. On remplace la deuxième équation par la somme des deux équations, le système équivaut à $\begin{cases} 4\alpha-\beta=11 \\ -2\alpha=-4 \end{cases}$. On obtient alors $\alpha=2$ et $\beta=-3$.
   Il faut à présent s'assurer que la troisième égalité est vérifiée par ces valeurs :
   $-4\alpha-3\beta=-4\times 2-3\times(-3)=1$ ce qui convient.
   Ainsi $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
   On en conclut que les points A, B, C et D sont également coplanaires.

Exercice 4.L :

1 $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

k doit donc être solution du système $\begin{cases} 1 = k \times 4 \\ -3 = k \times 2 \\ 5 = k \times 1 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ k = \frac{-3}{2} \\ k = 5 \end{cases}$.

Puisque ce système n'a pas de solution, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base d'un plan.

2 Soit a, b et c trois réels tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Les coordonnées du vecteur $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ sont $\begin{pmatrix} a \times 1 + b \times 4 + c \times 0 \\ a \times (-3) + b \times 2 + c \times 2 \\ a \times 5 + b \times 1 + c \times (-1) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} a + 4b \\ -3a + 2b + 2c \\ 5a + b - c \end{pmatrix}$.

L'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -3a + 2b + 2c = 0 \\ 5a + b - c = 0 \end{cases}$ donc à

$\begin{cases} a = -4b \\ -3 \times (-4b) + 2b + 2c = 0 \\ 5 \times (-4b) + b - c = 0 \end{cases}$ soit à $\begin{cases} a = -4b \\ 14b + 2c = 0 \\ -19b - c = 0 \end{cases}$ donc à $\begin{cases} a = -4b \\ c = -7b \\ -12b = 0 \end{cases}$ puis à $\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

On en conclut que les vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

Exercice 4.M :

On cherche trois réels a, b et c tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. On a vu dans la capacité précédente que le vecteur $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a + 4b \\ -3a + 2b + 2c \\ 5a + b - c \end{pmatrix}$.

L'égalité $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ est donc équivalente au système : $\begin{cases} a + 4b = -1 \\ -3a + 2b + 2c = -15 \\ 5a + b - c = 16 \end{cases}$

donc à $\begin{cases} a = -1 - 4b \\ -3 \times (-1 - 4b) + 2b + 2c = -15 \\ 5 \times (-1 - 4b) + b - c = 16 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -19b - c = 21 \end{cases}$

soit à $\begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -38b - 2c = 42 \end{cases}$. En remplaçant la troisième équation par la somme de la deuxième et de la troisième, le système devient $\begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -24b = 24 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

On en déduit l'égalité $\vec{t} = 3\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}$, donc les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $(3 ; -1 ; -2)$.